

Statistische Afdeling

Rapport S 68,

door

T.J.Terpstra.

Over een probleem uit de kwaliteitscontrôle.

Inhoud.

1. Beschrijving van het voorgestelde steekproefschema.
2. De exacte oplossing met behulp van het gemiddelde $\bar{x}$ en de spreiding s .
 - 2.1 Inleiding.
 - 2.2 De niet-centrale t-verdeling.
 - 2.3 De verdelingsfunctie van $t_1 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{s}$
 - 2.4 De formule voor de exacte betrouwbaarheidsintervallen.
3. Een benaderende oplossing voor het berekenen van betrouwbaarheidsintervallen voor P met behulp van het gemiddelde $\bar{x}$ en de gemiddelde range $w_{m,n}$ van een steekproef van de uitgebreidheid $N = nm$.
 - 3.1 Een benadering voor de verdelingsdichtheid van de gemiddelde range $w_{m,n}$.
 - 3.2 De exacte en de aangepaste verdelingsfunctie van de range w van steekproeven van g waarnemingen.
 - 3.3 De formules voor de betrouwbaarheidsintervallen.
4. Het berekenen van de betrouwbaarheidsintervallen.
 - 4.1 De formules en tabellen voor de berekeningen.
 - 4.2 Een numeriek voorbeeld.
5. De numerieke resultaten.
6. Conclusies.

1. Beschrijving van het voorgestelde steekproefschema.

Door de N.V. Van der Heem, 's-Gravenhage, werd op grond van de verderop vermelde theoretische beschouwing een steekproefschema samengesteld voor het bepalen van grenzen voor de kans P, dat een normaal verdeelde groot-
heid x, met onbekend gemiddelde en spreiding, een
gegeven grenswaarde a overschrijft. De grootheid waarvoor het interval wordt bepaald is dus

$$(1.1) \quad P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Uitgegaan werd van het artikel van E. Lord (1947) waarin de verdelingsdichtheid behandeld wordt van de grootheid

$$u = \frac{(\bar{x} - \mu) \cdot d_n \sqrt{N}}{w_{m,n}}, \quad 1)$$

waarin $\bar{x}$ het gemiddelde is van een steekproef van $N = mn$ waarnemingen en $w_{m,n}$ de gemiddelde range van de m groepen van n waarnemingen, waaruit deze steekproef bestaat; d_n is de mathematische verwachting van de range van een steekproef van de uitgebreidheid n uit een normale verdeling met spreiding 1. (Voor een aantal waarden van n is deze grootheid op numerieke wijze berekend uit de tabellen voor de verdelingsfunctie van de range van Hartley en Pearson (1942).) Bovenstaande grootheid u is geheel analoog met Student's t :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{N}.$$

De grootheid $\frac{w_{m,n}}{d_n}$ treedt dus op in plaats van de spreiding s .

Voor het opstellen van het steekproefschema werd de voorkeur gegeven aan de grootheid u boven t , daar de gemiddelde range veel sneller te berekenen is dan de spreiding van een steekproef van mn waarnemingen.

Wanneer $\bar{x}_0$ en $w_{m,n,0}$ de uit de steekproef bepaalde waarden voor $\bar{x}$ en $w_{m,n}$ zijn, werd vervolgens een 5%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde μ van de normale verdeling bepaald, welk interval van de gedaante

$$|\bar{x}_0 - \mu| \leq k w_{m,n,0}$$

is, met $k = \frac{u_0}{d_n \sqrt{N}}$ en waarin voor u_0 geldt:

$$P[|u| \geq u_0] = 0,05.$$

1) Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters. Deze formule vindt men als nr.(36) in het artikel van Lord.

De grootheid $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{N}$ bezit een bekende verdeling, namelijk een normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1. Voor μ is een betrouwbaarheidsinterval bepaald en voor σ wordt nu eenvoudig $w_{m,n,o}/d_n$ ingevuld, zonder dat er rekening mee gehouden wordt, dat de verdeling van de betrokken grootheid hierdoor verandert. Vervolgens worden de twee kansen

$$P\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{N} \geq \frac{a - (\bar{x}_0 - k w_{m,n,o})}{\frac{w_{m,n,o}}{d_n}} \sqrt{N}\right]$$

en

$$P\left[\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{N} \leq \frac{a - (\bar{x}_0 + k w_{m,n,o})}{\frac{w_{m,n,o}}{d_n}} \sqrt{N}\right]$$

berekend met de zojuist vermelde verwaarlozing, genomen als grenzen van het gezochte interval voor de grootheid P. Voor het steekproefschema werden voor m en n resp. de getallen 3 en 8 gekozen, daar bekend is dat het gebruik van de range bij groepen van 7 à 8 waarnemingen een minimaal verlies aan doeltreffendheid geeft.

Daar een steekproef van 24 waarnemingen in de praktijk zeer bruikbaar is, werd m = 3 gekozen.

Voor de met m = 3 en n = 8 corresponderende waarde voor k werd met behulp van tabel 4 en 11 uit Lord (1947) de waarde $k_0 = \frac{u}{d_n \sqrt{N}} = \frac{2,07}{2,8472 \times \sqrt{24}} = 0,148$ gevonden.

De gelijkstelling van σ en $w_{m,n,o}/d_n$ heeft echter ten gevolge, dat het gevonden interval geen betrouwbaarheidsinterval is. De kans, dat het de juiste waarde P bevat is onbekend, terwijl men kan vermoeden, dat deze kans kleiner is dan 0,95, omdat er een stochastisch element is verwaarloosd. Dit vermoeden wordt verderop numeriek onderzocht en door dit onderzoek versterkt.

In de volgende paragrafen zullen we een exacte en een benaderingsmethode geven voor de oplossing van het probleem.

Bij de exacte methode wordt gebruik gemaakt van het gemiddelde en de spreiding van de steekproef, bij de benaderingsmethode van het gemiddelde en de gemiddelde range. Voor deze laatste methode wordt een nomogram gegeven, waaruit het betrouwbaarheidsinterval voor P, met onbetrouwbaarheid 0,05 gemakkelijk kan worden gevonden. Op numerieke wijze zal worden aangetoond, dat de resultaten volgens deze twee methoden verkregen, niet veel van elkaar verschillen. De volgens het voorgestelde steek-

Proefschema berekende betrouwbaarheidsintervallen blijken systematisch te kort te zijn en liggen steeds geheel binnen de intervallen berekend volgens de exacte methode

2. De exacte oplossing met behulp van het gemiddelde $\bar{x}$ en de spreiding s van een steekproef van de uitgebreidheid N .

2.1 Inleiding.

Daar de grootheid P in de gedaante (1.1) geschreven kan worden, is het probleem van het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor P terug te brengen tot het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval voor $\frac{a-\mu}{\sigma}$. Dit laatste probleem is echter direct oplosbaar, daar de grootheid

$$(2.1.1) \quad \underline{t} = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \bar{x}}{s} = \frac{\sqrt{N} \cdot \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma} + \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}}{\frac{s}{\sigma}}$$

een niet-centrale t-verdeling bezit met parameter

$$(2.1.2) \quad \Theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}$$

en (N-1) vrijheidsgraden. Hierbij is:

$$(2.1.3) \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Opmerking:

Wanneer $\underline{z}$ een normaal verdeelde grootheid is met gemiddelde 0 en spreiding 1 en $\underline{w}$ is een grootheid die onafhankelijk van $\underline{z}$ verdeeld is, zodanig dat $f \cdot \underline{w}$ een χ^2 -verdeling bezit met f vrijheidsgraden, dan is de verdeling van de grootheid

$$(2.1.4) \quad \underline{t} = \frac{\underline{z} + \Theta}{\sqrt{\underline{w}}}$$

een niet-centrale t-verdeling met parameter Θ en f vrijheidsgraden. (Vgl. Johnson and Wflch (1940)).

Daar gemiddelde $\underline{x}$ en spreiding $\underline{s}$ van een steekproef uit een normale verdeling onafhankelijk verdeeld zijn (zie o.a. M.G.Kendall (1947), The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, p. 238) en de grootheid $(N-1)\underline{s}^2/\sigma^2$

waarbij $\underline{s}^2$ gedefinieerd is door (2.1.3) een χ^2 -verdeling bezit met $(N-1)$ vrijheidsgraden, is uit formule (2.1.1) direct duidelijk, dat $\sqrt{N} \cdot \frac{\underline{a} - \bar{x}}{\underline{s}}$ een niet-centrale t-verdeling bezit met $\theta = \sqrt{N} \cdot \frac{\underline{a} - \mu}{\sigma}$ en $f = N-1$.

Daar wij bij het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval voor $\frac{\underline{a} - \mu}{\sigma}$ gebruik moeten maken van de gedaante van de verdelingsfunctie van $\sqrt{N} \cdot \frac{\underline{a} - \bar{x}}{\underline{s}}$ zullen wij deze eerst bepalen voor de grootte $\underline{t} = \frac{\underline{z} + \theta}{\sqrt{w}}$. Door substitutie van de geschikte waarden voor θ en f vinden wij hieruit dan onmiddellijk de verdelingsfunctie van $\sqrt{N} \cdot \frac{\underline{a} - \bar{x}}{\underline{s}}$.

2.2 De verdelingsfunctie van de "niet-centrale" t.

Daar de grootheden $\underline{z}$ en $\underline{w}$ onafhankelijk van elkaar verdeeld zijn, is de simultane verdelingsdichtheid $f(\underline{z}, \sqrt{w})$ het product van de verdelingsdichtheden $g(\underline{z})$ en $h(\sqrt{w})$, welke resp. als volgt geschreven kunnen worden:

$$g(\underline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\underline{z}^2}{2}}$$

$$h(\sqrt{w}) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}fw} w^{\frac{f-1}{2}}$$

$$C = \left[\Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \right]^{-1} \cdot 2^{-\left(\frac{f}{2}-1\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}}$$

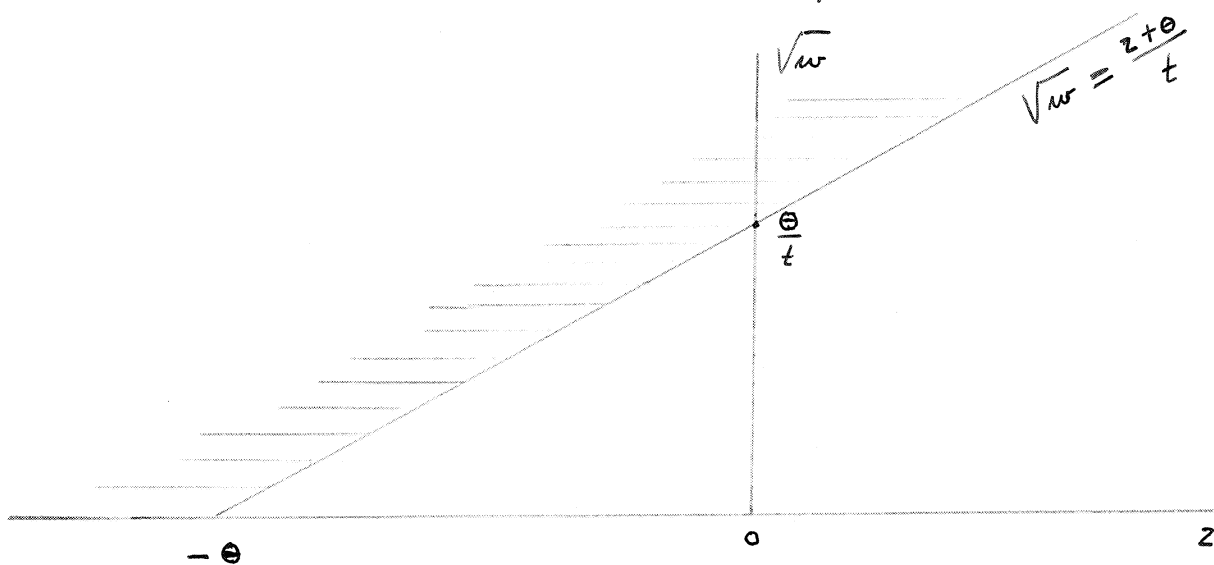


fig. 1.

Noemen wij de verdelingsfunctie van $\underline{t}$ nu $F(\underline{t}; \theta, f)$, dan vinden wij aan de hand van figuur 1:

$$F(\underline{t}; \theta, f) = P[\underline{t} \leq t] = C \int_0^{\infty} h(\sqrt{w}) \left[\int_{-\infty}^{\frac{t\sqrt{w}-\theta}{\sqrt{w}}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] d(\sqrt{w})$$

Dus is

$$F(t; \theta, f) = C \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} f w} w^{\frac{1}{2} - 1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t\sqrt{w} + \theta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right] d(\sqrt{w}),$$

(2.2.1)

$$\text{met } C = 2^{-\left(\frac{1}{2} - 1\right)} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Opmerking:

Uit bovenstaande algemene vorm voor de verdelingsfunctie $F(t; \theta, f)$ volgt onmiddellijk de volgende

Eigenschap:

$$(2.2.2) \quad P[\underline{t} \geq t_0 | \theta = \theta_0] = P[\underline{t} \leq -t_0 | \theta = -\theta_0],$$

want $P[\underline{t} \geq t_0 | \theta = \theta_0] = 1 - F(t_0; \theta_0) = F(-t_0; -\theta_0) =$
 $= P[\underline{t} \leq -t_0 | \theta = -\theta_0]$

Deze eigenschap volgt ook direct uit de definitie van $\underline{t}$ (zie formule (2.1.4)).

2.3 De verdelingsfunctie van $\underline{t}_1 = N \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$

Deze verdelingsfunctie volgt nu onmiddellijk uit (2.2.1), door de substitutie (zie 2.1):

$$(2.3.1) \quad \theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}.$$

en $f = N-1$,

zodat

$$(2.3.2) \quad F(t_1, \theta) = C \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (N-1) y^2} y^{N-2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma} - t_1 y}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right] dy.$$

$$\text{met } C = 2^{-\frac{N-3}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]^{-1} (N-1)^{\frac{N-1}{2}}.$$

Opmerking:

Stellen wij $a = \mu$, dan is $\frac{d}{dt} F(t_1)$ de symmetrische (centrale) verdelingsdichtheid van Student's $\underline{t} = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$.

2.4 De formules voor de betrouwbaarheidsintervallen.

Nu de verdelingsfunctie $F(t_1, \theta)$ voor de grootheid $\underline{t}_1 = \sqrt{N} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{s}$ bekend is, kunnen wij de formules geven voor het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid β , voor de grootheid $\theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}$.

Noemen wij onder- en bovengrens van dit betrouwbaarheidsinterval θ_1 resp. θ_2 , dan geldt wanneer $t_{1,0}$ de uit de steekproef berekende waarde voor $\underline{t}_1$ is, voor de bij $t_{1,0}$ behorende waarden θ_1 en θ_2 :

$$(2.4.1) \quad P[\underline{t}_1 \geq t_{1,0} | \theta = \theta_1] = 1 - F(t_{1,0}, \theta_1) = \beta,$$

$$\text{en } P[\underline{t}_1 \leq t_{1,0} | \theta = \theta_2] = F(t_{1,0}, \theta_2) = \beta - \beta,$$

met $0 \leq \beta_1 \leq \beta$.

Deze twee betrekkingen vormen samen een parameter-
voorstelling van de kromme $k(\theta_1, \theta_2)$ in het (θ_1, θ_2) -
vlak, waarop alle punten (θ_1, θ_2) liggen, welke een be-
trouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid β voor θ
vormen, bij gegeven $t_{1,0}$.

Door eliminatie van β_1 uit bovenstaande twee be-
trekkingen (door optelling) en onder gebruikmaking van
(2.3.2) vinden wij voor $k(\theta_1, \theta_2)$ de impliciete verge-
lijking

$$(2.4.2) \quad 1 - \beta = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(N-1)\gamma^2} \gamma^{N-2} \left[\int_{\theta_1 - t_{1,0}\gamma}^{\theta_2 - t_{1,0}\gamma} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right] d\gamma$$

(Stellen wij $\beta_1 = \frac{1}{2}\beta$, dan vinden wij uit (2.4.1) een
zgn. symmetrisch betrouwbaarheidsinterval voor θ , met
onbetrouwbaarheid β .)

De met $[\theta_1, \theta_2]$ corresponderende betrouwbaarheids-
intervallen $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ voor de grootheid P (zie (1.1)) vindt
men nu door de transformaties:

$$(2.4.3) \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta_2/\sqrt{N}}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta_1/\sqrt{N}}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Opmerking:

1e. Een betrouwbaarheidsinterval $[q_1, q_2]$ voor de kans Q ,
dat de normaal verdeelde grootheid beneden een vaste
grens a zal liggen, wordt gevonden door de transfor-
maties

$$(2.4.4) \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta_1/\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - p_2$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta_2/\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - p_1.$$

2e. Een praktische uitwerking en tabellering van de be-
schreven methode vindt men in §4.1.

3. Een benaderende oplossing voor het berekenen van betrouw-
baarheidsintervallen voor P met behulp van het gemiddel-
de $\bar{x}$ en de gemiddelde range $w_{m,n}$ van een steekproef van
de uitgebreidheid $N = mn$.

3.1 Een benadering voor de verdelingsdichtheid van de gemiddelde range $\frac{w_{m,n}}{\sigma}$.

Daar de exacte verdelingsdichtheid van de gemiddelde range $\frac{w_{m,n}}{\sigma}$ van m steekproeven van ieder n waarnemingen uit een normale verdeling met spreiding σ van zeer ingewikkelde aard en moeilijk te berekenen is, willen wij gebruik maken van een benaderingsmethode voor deze verdelingsdichtheid, welke P.B.Patnaik (1950) gebruikt en welke zeer bevredigende resultaten geeft.

Patnaik ging hierbij uit van de veronderstelling, dat de grootheid $\frac{w_{m,n}}{c(m,n)\sigma}$ bij passende keuze van een constante $c(m,n)$ ongeveer dezelfde verdelingsdichtheid zal bezitten als de grootheid $\frac{u}{\sigma}$, echter met een gewijzigd aantal vrijheidsgraden $\nu(m,n)$. Hij onderstelt dus dat de grootheid

$$u^2 = \nu(m,n) \left(\frac{w_{m,n}}{c(m,n)\sigma} \right)^2$$

bij benadering verdeeld is als een grootheid u'^2 , die een χ^2 -verdeling bezit met $\nu(m,n)$ vrijheidsgraden. De coëfficiënten $c(m,n)$ en $\nu(m,n)$ worden berekend door gelijkstelling van eerste en tweede moment van de werkelijke verdeling van $\frac{w_{m,n}}{\sigma}$ (zie verderop) met eerste en

tweede moment van de verdeling voor $\underline{v} = \frac{c(m,n)}{\sqrt{\nu(m,n)}} \underline{u}'$.

Noemen wij:

$$(3.1.1) \quad E\left(\frac{w_{m,n}}{\sigma}\right) = E\frac{w_n}{\sigma} = \alpha_n = M$$

en

$$(3.1.2) \quad \text{Var}\left(\frac{w_{m,n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{m} \text{Var}\left(\frac{w_n}{\sigma}\right) = V,$$

dan kunnen M en V berekend worden uit de waarden voor gemiddelde en variantie van $\frac{w_n}{\sigma}$, welke bepaald zijn uit de tabellen voor de verdelingsfunctie van de range $\frac{w_n}{\sigma}$. (Hartley and Pearson (1942).)

Daar

$$E(\underline{v}) = \frac{c}{\sqrt{\nu}} \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},$$

$$\text{Var}(\underline{v}) = \frac{c^2}{\nu} \left[\nu - 2 \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right\}^2 \right]$$

voldoen $\nu(m,n)$ en $c(m,n)$ aan de volgende twee vergelijkingen:

$$M = \frac{c}{\sqrt{r}} \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}$$

en

$$N = \frac{c^2}{r} \left[r - 2 \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \right\}^2 \right]$$

Met behulp van de ontwikkeling van Stirling voor de Γ -functie, vindt Patnaik uit bovenstaande twee vergelijkingen de volgende twee approximatieve oplossingen voor $Y(m,n)$ en $c(m,n)$, terwijl hij ook een tabel van deze grootheden geeft voor $n = 3, 4, \dots, 10$ en $m = 1, 2, \dots, 5$. In deze tabel vindt men voor $m = 3$ en $n = 8$:

$$c(3,8) = 2,8850$$

en

$$Y(3,8) = 18,328.$$

3.2 De exacte en de aangepaste verdelingsfunctie van de range w van steekproeven van 8 waarnemingen.

Om te controleren of bovengenoemde benaderingsmethode de verdeling van de range goed weergeeft, hebben wij voor $m = 1$ en $n = 8$, dus voor één enkele steekproef van de uitgebreidheid 8, op numerieke wijze de benaderde verdelingsfunctie van de range bepaald en vergeleken met de exacte, door Hartley en Pearson getabellerde verdelingsfunctie. Bij de berekeningen werd gebruik gemaakt van Karl Pearson's "Table of the incomplete function", Cambridge 1946. (Tabellen van de exacte verdelingsfuncties van de gemiddelde range van 3 steekproeven van 8 waarnemingen zijn niet beschikbaar. Daarom moeten wij volstaan met $m = 1$.)

De onderstaande numerieke resultaten werden hierbij gevonden, waaruit blijkt, dat de benadering vrij goed is en dat de aangepaste verdeling van $w_{1,8}$ iets "platter" is dan de exacte. Men mag aannemen, dat het verschil tussen de overeenkomstige verdelingsfuncties voor $m = 3$ en $n = 8$ ook klein is, (zie Tabel 1 op volgende pagina).

3.3 De formules voor de betrouwbaarheidsintervallen.

Daar voor een steekproef uit een normale verdeling gemiddelde $\bar{x}$ en range w onafhankelijk verdeeld zijn (E.Lord (1947), p. 61 en 62) en de grootheid

$$t_1 = \sqrt{N} \frac{\alpha - \bar{x}}{\frac{w_{m,n}}{c(m,n)}}$$

als volgt geschreven kan worden:

$$(3.3.1) \quad t_1 = \frac{\sqrt{N} \frac{\alpha - \mu}{\sigma} + \sqrt{N} \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma}}{\frac{w_{m,n}}{c(m,n) \sigma}}$$

Tabel 1
De exacte en benaderde verdelingsfunctie van $w_{1,8}$.

w	Exacte F(w)	Benaderende F(w)	Vershil
0,000	0,0000	0,0000	0,0000
0,498	0,0000	0,0000	+ 0,000
1,220	0,0109	0,0131	+ 0,0022
1,575	0,0461	0,0500	+ 0,0035
1,867	0,1086	0,1111	+ 0,0025
2,113	0,1892	0,1904	+ 0,0012
2,336	0,2816	0,2800	- 0,0016
2,818	0,5131	0,5065	- 0,0066
3,228	0,6928	0,6912	- 0,0016
3,522	0,8006	0,7977	- 0,0029
3,922	0,8982	0,8988	+ 0,0006
4,285	0,9498	0,9520	+ 0,0022
4,726	0,9811	0,9833	+ 0,0022
5,502	0,9975	0,998	+ 0,0005
6,757	1,0000	1,0000	0,0000

bezit t_2 , bij benadering een niet-centrale t-verdeling met parameter

(3.3.2) $\theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}$,

en $f = \nu(m,n)$ vrijheidsgraden (zie § 2.1 en § 2.2). Door substitutie van $\theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma}$ en $f = \nu(m,n)$ in formule (2.2.1), vinden wij voor de benaderende verdelingsfunctie $F(t_2, \theta)$ voor t_2 ,

(3.3.3)
$$F(t_2, \theta) = C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \nu(m,n) y^2} y^{\nu(m,n)-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta - t_2 y}^\infty e^{-\frac{1}{2} u^2} du \right] dy$$

met

$$C_2 = 2^{-\left(\frac{\nu(m,n)}{2} - 1\right)} \left[\Gamma\left(\frac{\nu(m,n)}{2}\right) \right]^{-1} \cdot \gamma(m,n)^{\frac{\nu(m,n)}{2}}.$$

Het berekenen van een betrouwbaarheidsinterval voor P met onbetrouwbaarheid β gaat dus op geheel analoge wijze als in § 3. Wanneer $t_{2,0}$ de uit de steekproef berekende waarde voor t_2 is, geschiedt dit dus (zie § 2.4) met behulp van de volgende vergelijkingen:

$$(3.3.4) \quad P[t_2 > t_{2,0} | \theta = \theta_1] = 1 - F(t_{2,0}, \theta_1) = \beta_1,$$

$$(3.3.5) \quad P[t_2 \leq t_{2,0} | \theta = \theta_2] = F(t_{2,0}, \theta_2) = \beta - \beta_1,$$

met $0 \leq \beta_1 \leq \beta$.
en de vergelijkingen

$$(3.3.6) \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta_1/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta_1/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Opmerking:

Voor de praktische uitvoering der berekeningen verwijzen wij naar §4.1.

4. Het berekenen van de betrouwbaarheidsintervallen.

4.1 De formules en tabellen voor de berekeningen.

Zoals in §2 en §3 gebleken is, is het berekenen van betrouwbaarheidsintervallen voor de grootheid P terug te brengen tot het berekenen van betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter θ uit een niet-centrale t -verdeling. Het berekenen van deze laatste betrouwbaarheidsintervallen kan nu gemakkelijk plaats vinden aan de hand van formules en tabellen uit een artikel van Johnson en Wflch (1940), pp. 372.

Onderstellen wij, dat t_0 de uit de steekproef bepaalde waarde voor de grootheid t is, welke een niet centrale t -verdeling bezit met parameter θ en f vrijheidsgraden. Een betrouwbaarheidsinterval $[\theta_1, \theta_2]$ voor θ met onbetrouwbaarheid β wordt dan verkregen door de volgende berekeningen uit te voeren:

1e. Men berekent de grootheid $y = \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}}$ of

de grootheid $y' = \frac{t_0}{\sqrt{2f}} \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}}$, naar gelang $\left|\frac{t_0}{\sqrt{2f}}\right|$

groter resp. kleiner is dan 0,75 (dit staat in verband met de door de schrijvers gevolgde methode van tabellieren).

2e. Vervolgens wordt uit een tabel, behorende bij β , via 3 ingangen (waarvoor de grootheden y (of y'), f en t_0 gebruikt worden) een grootheid $\lambda(f, t_0, \beta_1)$ bepaald, waarna de oplossing θ_1 van de vergelijking (zie §2.4 en §3.3)

$$P[\underline{t} \geq t_0 | \theta = \theta_1] = \beta_1,$$

gevonden wordt met de formule

$$(4.1.1) \quad \theta_1 = t_0 - \lambda(f, t_0, \beta_1) \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{1/2}.$$

3e. De waarde van θ_2 , die voldoet aan

$$P[\underline{t} \leq t_0 | \theta = \theta_2] = \beta - \beta_1,$$

wordt op analoge wijze berekend, echter is nu

$$(4.1.2) \quad \theta_2 = t_0 + \lambda(f, -t_0, \beta_2) \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)^{1/2}.$$

Opmerking:

Het verband tussen de gedaanten van de formules (4.1.1) en (4.1.2) volgt onmiddellijk uit de eigenschap:

$$P[\underline{t} \leq t_0 | \theta = \theta_1] = P[\underline{t} \geq -t_0 | \theta = -\theta_1].$$

4.2 Een numeriek voorbeeld.

We geven thans een voorbeeld van het berekenen van een symmetrisch betrouwbaarheidsinterval voor de grootheid P met behulp van het gemiddelde $\bar{x}$ en de gemiddelde range w van 3 steekproeven van elk 8 waarnemingen (dus volgens de methode, beschreven in §3).

Uit de tafel met "random normal deviates" van H.Wold (1948) werd de volgende steekproef uit een normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 genomen:

- 0,59	- 0,09	0,02
0,34	0,05	0,37
0,74	0,35	- 1,38
- 1,09	1,33	- 0,15
1,19	- 0,90	0,77
1,27	0,11	- 0,17
2,01	- 0,56	- 1,03
0,45	0,68	- 0,22

Wanneer voor de grenswaarde a , de waarde 0,80 gekozen wordt en $\beta_1 = \beta_2 = 0,025$ genomen wordt, dan wordt op onderstaande wijze een betrouwbaarheidsinterval berekend voor de kans P , dat de normaal verdeelde grootheid $\underline{x}$ de waarde $a = 0,80$ overschrijdt.

Allereerst wordt een symmetrisch betrouwbaarheidsinterval berekend voor de grootheid $\theta = \sqrt{N} \cdot \frac{a - \mu}{\sigma} = \sqrt{24} \cdot \frac{a - \bar{x}}{w}$ met behulp van de formules en tabellen voor een niet-centrale t -verdeling met parameter θ en $f = \nu(3,8) = 18,328$ (zie §4.1). Voor de grootheid $t_2 = \sqrt{24} \cdot \frac{a - \bar{x}}{w}$ vinden we:

$c(3, \theta)$

$$t_{2,0} = \sqrt{24} \cdot \frac{0,80 - 0,15}{\frac{2,49}{2,8850}} = 3,6849$$

$$\left| \frac{t_{2,0}}{\sqrt{24}} \right| = \left| \frac{t_{2,0}}{\sqrt{2 \cdot \gamma(3,8)}} \right| = \left| \frac{t_{2,0}}{\sqrt{2 \cdot 10,328}} \right| = 0,6092$$

Deze laatste waarde is kleiner dan 0,75, dus moet y' berekend worden.

$$y' = \frac{t_{2,0}}{\sqrt{2 \cdot \gamma(3,8)}} \left(1 + \frac{t_{2,0}^2}{2 \cdot \gamma(3,8)} \right)^{-\frac{1}{2}} = 0,6092 \times 0,8541 = 0,5203$$

Uit de tabel, behorende bij $\beta_1 = 0,025$, vinden we

$$\lambda(f, t_{2,0}, \beta_1) = \lambda(18,328; 3,6879; 0,025) = 1,99$$

dus is

$$\Theta_1 = t_{2,0} - \lambda \left(1 + \frac{t_{2,0}^2}{24} \right)^{\frac{1}{2}} = 3,69 - (1,99 \times 1,17) = 1,36.$$

$$\lambda(f, -t_{2,0}, \beta_2) = \lambda(18,328; -3,6879; 0,025) = 1,93,$$

dus is

$$\Theta_2 = t_{2,0} + \lambda \left(1 + \frac{t_{2,0}^2}{24} \right)^{\frac{1}{2}} = 3,69 + (1,93 \times 1,17) = 5,95$$

$$\frac{\Theta_1}{\sqrt{N}} = \frac{\Theta_1}{\sqrt{24}} = 0,204 \times 1,3578 = 0,28$$

en

$$\frac{\Theta_2}{\sqrt{N}} = 0,204 \times 5,9477 = 1,21$$

Voor
$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Theta_1/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

en

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Theta_2/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

vinden we uit een tabel voor de normale verdeling:

$$p_1 = 0,11$$

$$p_2 = 0,39,$$

zodat het interval $[0,11; 0,39]$ een symmetrisch be-

trouwbaarheidsinterval voor P is met onbetrouwbaarheid 0,05.

5. De numerieke resultaten; een nomogram.

Met behulp van een aantal steekproeven uit de tafel met "random normal deviates" van Wold (1948) zijn volgens de 3 besproken methoden betrouwbaarheidsintervallen berekend voor de grootheid P (met $\beta_1 = \beta_2 = 0,025$). Voor de grens a zijn de waarden 0,80 en 1,40 gekozen, welke corresponderen met de werkelijke overschrijdingskansen $P = 0,21$ en $P = 0,08$ (de steekproeven komen immers uit een normal collectie met gemiddelde 0 en spreiding 1).

De gevonden numerieke resultaten zijn vermeld op bijlage I.

Naar aanleiding van deze resultaten valt het volgende op te merken:

1e. De volgens het in §1 voorgestelde steekproefschema berekende intervallen voor P zijn korter dan de volgens de beide in §2 en §3 beschreven methoden berekende betrouwbaarheidsintervallen. Voor de grens $a = 0,80$ is het verschil niet zo groot als voor de grens $a = 1,40$.

Voor de grens $a = 0,80$ blijken 3 van de volgens het voorgestelde steekproefschema (zie §1) berekende betrouwbaarheidsintervallen de werkelijke waarde $P = 0,21$ niet te bevatten, terwijl voor 2 van deze 3 gevallen de volgens de beide andere methoden (§2 en §3) berekende intervallen ze wel bevatten.

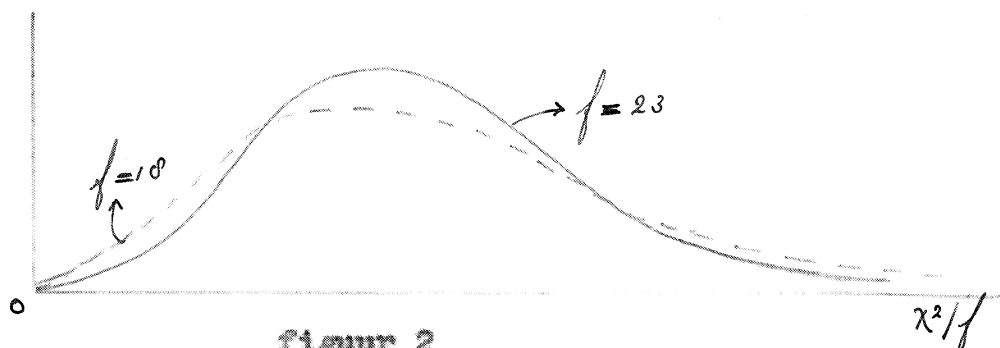
2e. Met behulp van de tweede benaderingsmethode, welke gebruik maakt van het gemiddelde $\bar{x}$ en de gemiddelde rang $w_{3,8}$ (zie §3), worden betrouwbaarheidsintervallen voor P gevonden, die zowel voor $a = 0,80$ als $a = 1,40$ weinig verschillen van die met behulp van de spreiding s berekend (zie §2). De intervallen hebben steeds iets grotere lengte, welk effect voor grotere waarden van a in verhouding sterker wordt.

Op bijlage I komt maar 1 geval voor, waar de lengte van het interval kleiner is dan het overeenkomstige, bepaald met de spreiding s .

Dit gedrag van de lengte van het betrouwbaarheidsinterval, dat men kan verklaren uit het verlies aan doeltreffendheid ten gevolge van het gebruik van w in plaats van s , is ook als volgt aannemelijk te maken:

Bij de tweede benaderingsmethode (§3) wordt gebruik gemaakt van een χ^2 -verdeling als benadering voor de

verdeling van de gemiddelde range $\underline{w}$. Deze χ^2 -verdeling heeft echter minder vrijheidsgraden dan die voor de spreiding $\underline{s}$, namelijk resp. $f = 18,328$ en $f = 23$, zodat de verdelingen het in figuur 2 geschetste gedrag ten opzichte van elkaar vertonen.



figuur 2

Dit zal echter ten gevolge hebben, dat de met de gemiddelde range $\underline{w}$ corresponderende niet-centrale t-verdeling dikkere uiteinden heeft dan die, welke behoort bij de spreiding $\underline{s}$.

Met de benaderingsmethode met behulp van de gemiddelde range (§3) worden daarom bij kleine β grotere betrouwbaarheidsintervallen voor $\Theta = \sqrt{N} \cdot \frac{\underline{w}}{\underline{s}} \cdot \mu$ gevonden, wat aanleiding is tot het systematisch optreden van grotere betrouwbaarheidsintervallen voor P .

3e. Met behulp van de gevonden resultaten voor de betrouwbaarheidsintervallen voor P en de bijbehorende waarden van de grootheden $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{w}}$ en $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{s}}$ is een grafiek gemaakt, waarin p_1 en p_2 tegen $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{w}}$ en tegen $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{s}}$ zijn uitgezet (zie grafiek 1).

Deze grafiek kan dus gebruikt worden voor het bepalen van het "symmetrische" betrouwbaarheidsinterval voor P met $\beta = 0,05$.

Opmerking:

a. De verhouding van de schalen, volgens welke de grootheden $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{w}}$ en $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{s}}$ uitgezet zijn, is als $1 : c(3,8) = 1 : 2,8850$, daar de grootheid $\frac{\underline{w}}{\underline{s}}$ als schatting van $\underline{s}$ beschouwd wordt. Het verloop van p_1 en p_2 is praktisch gelijk voor $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{w}}$ en $\frac{\underline{a}-\underline{x}}{\underline{s}}$.

6. Conclusies.

1e. Bij toepassing van het voorgestelde steekproef-schema (zie § 1) worden te korte betrouwbaarheidsintervallen gevonden, welk effect groter wordt naarmate de grens α hoger gesteld wordt.

2e. De in § 3 ontwikkelde methode, waarbij met behulp van het gemiddelde $\bar{x}$ en de gemiddelde range w betrouwbaarheidsintervallen voor P bepaald worden, geeft goede resultaten en is, daar de steekproefwaarde van de grootheid $\frac{\bar{x} - \bar{a}}{w}$ gemakkelijk berekend kan worden, zeer geschikt voor gebruik bij kwaliteitscontrole.

Voor deze methode kunnen bovendien voor verschillende waarden van de onbetrouwbaarheid β nomogrammen berekend worden, waaruit de betrouwbaarheidsintervallen voor P direct afgelezen kunnen worden na berekening van $\frac{\bar{x} - \bar{a}}{w}$ (zie b.v. grafiek 1, waar $\beta_1 = \beta_2 = 0,025$).

De voor dit rapport noodzakelijke berekeningen zijn voor een gedeelte uitgevoerd door de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

Litteratuur:

1. H.L. Johnson en B.L. Welch (1940), Applications of the non-central t-distribution, Biometrika 31, p. 362-389.
2. M.G. Kendall (1947), The Advanced Theory of Statistics (1947), London.
3. E. Lord (1947), The use of range in place of standard deviation in the t-test, Biometrika 34, p. 41-67.
4. E.S. Pearson en H.O. Hartley (1942), The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population, Biometrika 32, p. 301-310.
5. P.B. Patnaik (1950), The use of range as an estimator of variance in statistical tests, Biometrika 37, p. 78-88.
6. H. Wold (1948), Random normal deviates, Cambridge University Press.

nummer steek- proef	$\bar{x}$	s	$\bar{w}$	reken- me- thode ¹⁾	G = 0,80		G = 1,40	
I	- <u>0,35</u>	0,8597	2,43	a	0,03	0,22	0,003	0,09
				b	0,03	0,22	0,002	0,09
				c	0,04	0,17 ←	0,006	0,05 ←
II	- 0,32	1,1326	2,94	a	0,07	0,31		
				b	0,05	0,29		
				c	0,05	0,25		
III	<u>0,18</u>	1,1052	3,44	a	0,16	0,44	0,05	0,28
				b	0,17	0,47	0,06	0,30
				c	0,17	0,46	0,07	0,28
IV	0,48	1,2277	3,36	a	0,25	0,56 ←		
				b	0,25	0,56 ←		
				c	0,24	0,56 ←		
V	<u>0,00</u>	0,7077	2,20	a	0,05	0,27	0,003	0,10
				b	0,06	0,30	0,005	0,13
				c	0,07	0,27	0,01	0,08
VI	0,29	1,0347	2,67	a	0,18	0,47		
				b	0,16	0,46		
				c	0,16	0,45		
VII	- 0,14	0,8710	2,65	a	0,06	0,29		
				b	0,06	0,31		
				c	0,07	0,28		
VIII	0,05	1,0689	3,24	a	0,13	0,40		
				b	0,13	0,42		
				c	0,13	0,40		
IX	<u>0,15</u>	0,8223	2,49	a	0,11	0,38	0,02	0,18
				b	0,11	0,39	0,02	0,20
				c	0,12	0,37	0,03	0,15
X	- 0,35	0,9032	2,64	a	0,04	0,24		
				b	0,03	0,25		
				c	0,05	0,20 ←		
XI	0,16	0,9307	2,54	a	0,13	0,41		
				b	0,12	0,40		
				c	0,12	0,38		
XII	- <u>0,08</u>	1,0439	3,07	a	0,10	0,36	0,025	0,20
				b	0,10	0,37	0,02	0,21
				c	0,10	0,35	0,03	0,17
XIII	0,17	0,9428	2,76	a	0,13	0,41		
				b	0,14	0,42		
				c	0,14	0,41		
XIV	0,01	0,9695	3,29	a	0,10	0,37		
				b	0,13	0,41		
				c	0,13	0,40		
XV	0,125	1,0083	2,83	a	0,13	0,41		
				b	0,13	0,37		
				c	0,13	0,40		

Met een pijl zijn die intervallen aangegeven, die de "ware" overschrijdingskansen (0,21 resp. 0,08) niet bevatten.

- 1) Methode (a): met gemiddelde $\bar{x}$ en spreiding s (zie § 2)
Methode (b): met gemiddelde $\bar{x}$ en gemiddelde range $\bar{w}$ (zie § 3)
Methode (c): het voorgestelde steekproefschema (zie § 1).

Grafiek 1

p ↑

.6
.5
.4
.3
.2
.1
0

xxxx: $\frac{a - \bar{x}}{s}$ $m = 3$
: $\frac{a - \bar{x}}{w}$ $m = 8$
 $\beta_1 = \beta_2 = 0,025$

